Κεφάλαιο 1.

Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$

• Αλγεβρική Δομή

<u>Εισαγωγικά</u>: Μπορούμε να φανταστούμε μια πραγματική συνάρτηση 2 μεταβλητών, $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, ως την "επιφάνεια" που δημιουργείται από ένα "τοπίο" πάνω από ένα επίπεδο.
[Η "επιφάνεια" είναι το γράφημα της συνάρτησης $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in U\}$, όπου το $f(x,y)$ δίνει το ύψος στο σημείο $(x,y) \in U$.]

⟹ Για να περιγράψουμε αυτή την επιφάνεια, θα πρέπει να χαρτογραφήσουμε το επίπεδο. Αυτό γίνεται εφόσον εισάγουμε αυθαίρετα ένα καρτεσιανό σ.σ στο επίπεδο και αντιστοιχίσουμε κάθε σημείο του επιπέδου με το διάνυσμα θέσης του.

Η διαδικασία αυτή γενικεύεται με φυσικό τρόπο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι καταρχήν ο διανυσματικός χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$, πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ο οποίος έχει ως στοιχεία τα διανύσματα $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, ως προς τη συνήθη βάση $\{\bar{e}_1 = (1,0,\dots,0), \dots, \bar{e}_n = (0,0,\dots,1)\}$

- Ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \text{ με}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ με}$$

Δε βάζω κάποιο σύμβολο

$$\alpha \bar{x} = \alpha (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Οι δύο παραπάνω πράξεις καθιστούν τον $\mathbb{R}^n$ διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$.

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}, \ \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbb{R}^n$
- $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}, \ \forall \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$
- $\exists!\ \bar{0}=(0,\dots,0) : \bar{0}+\bar{x}=\bar{x}, \ \forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$
- $\forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n \ \exists!\ -\bar{x}=(-x_1,\dots,-x_n) : -\bar{x}+\bar{x}=\bar{0}$

- $\exists!\ 1\in\mathbb{R} : 1\bar{x}=\bar{x}, \ \forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$
- $\alpha(\beta\bar{x})=(\alpha\beta)\bar{x}, \ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}, \ \forall \alpha\in\mathbb{R}$ και $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$
- $(\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}, \ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

, τα οποία αποδεικνύονται άμεσα με χρήση των ιδιοτήτων πρόσθεσης / βαθ. πολ/μου στο $\mathbb{R}$

Μπορούμε να εισάγουμε και το εσωτερικό γινόμενο μία πράξη $\cdot : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $\bar{x}\cdot\bar{y}=(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n)$

$$:=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=(x_1y_1+\dots+x_ny_n),$$

η οποία πράξη έχει τις ιδιότητες:

$\Longrightarrow$

• Συμμετρία: $\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{y}\cdot\bar{x},\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$

• Γραμμικότητα: $(\alpha\bar{x})\cdot\bar{y}=\alpha(\bar{x}\cdot\bar{y})$ και $(\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{z}=\bar{x}\cdot\bar{z}+\bar{y}\cdot\bar{z},\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R},\ \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbb{R}^n$

• Θετικά ορισμένη πράξη: $\bar{x}\cdot\bar{x}\geq 0,\ \forall\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ και "=" μόνο για $\bar{x}=\bar{0}$.

Για $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$ ορίζουμε τη γωνία θ μεταξύ των $\bar{x}$ και $\bar{y}$ μέσω της σχέσης:

$$\cos\theta=\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$$

(όπου $\|\bar{x}\|:=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$, το μήκος του διανύσματος $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ ή (Ευκλείδια) <u>νόρμα</u> του $\bar{x}$)

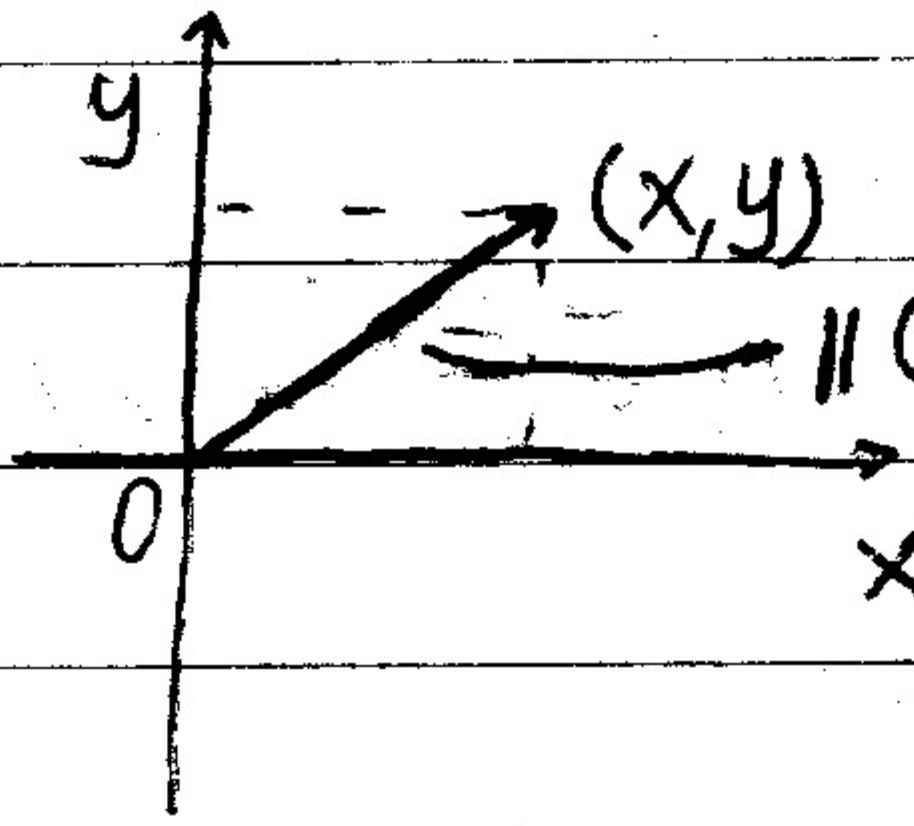
Η Ευκλείδια νόρμα $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$\|\bar{x}\|:=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}},\ \forall\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$, με ιδιότητες:

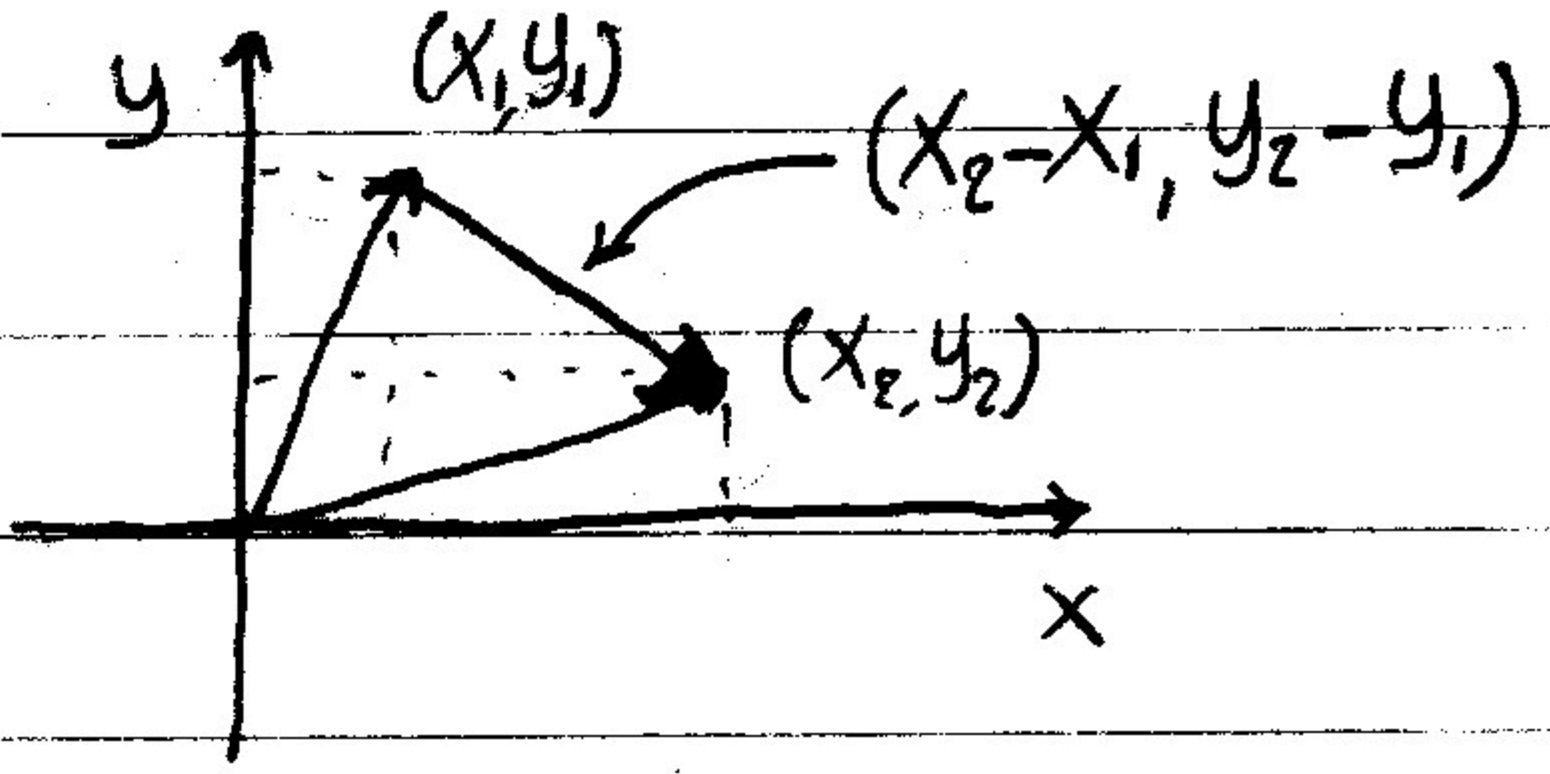
• $\|\bar{x}\|\geq 0,\ \forall\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$
• $\|\alpha\bar{x}\|=|\alpha|\|\bar{x}\|,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ και $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$
• $\|\bar{x}+\bar{y}\|\leq\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|,\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$
(Τριγωνική Ανισότητα ή Ανισότητα Minkowski)

Η Ευκλείδια νόρμα $\|\bar{X}\|$ δίνει το μήκος του διανύσματος $\bar{X}$, δηλαδή την απόσταση του σημείου X από το O.

<u>Στον $\mathbb{R}^2$:</u>



$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x,y)\cdot(x,y)}$$



Η απόσταση των σημείων (x_1,y_1), (x_2,y_2) δίνεται από το μήκος του διανύσματος (x_2-x_1, y_2-y_1), δηλαδή είναι $\|(x_2-x_1, y_2-y_1)\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Ότι ισχύει στον $\mathbb{R}^2$ σε σχέση με την απόσταση, ισχύει και στον $\mathbb{R}^n$.

Η απόσταση δύο σημείων στον $\mathbb{R}^n$, δίνεται από την απεικόνιση

$$d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|(x_1,\dots,x_n)-(y_1,\dots,y_n)\|$$
$$= \|(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},$$

με ιδιότητες :

- $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ και "=" μόνο όταν $\bar{x}=\bar{y}$
- $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x}), \ \forall \ \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$
- $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y}), \ \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \mathbb{R}^n$

Η d καλείται μετρική απεικόνιση στο $\mathbb{R}^n$, όπως ~~και~~ καθε άλλη απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ πληρούσα τις 3 παραπάνω ιδιότητες.

Η Ανισότητα Cauchy-Schwarz (1)

Έστω $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|$

Απόδειξη

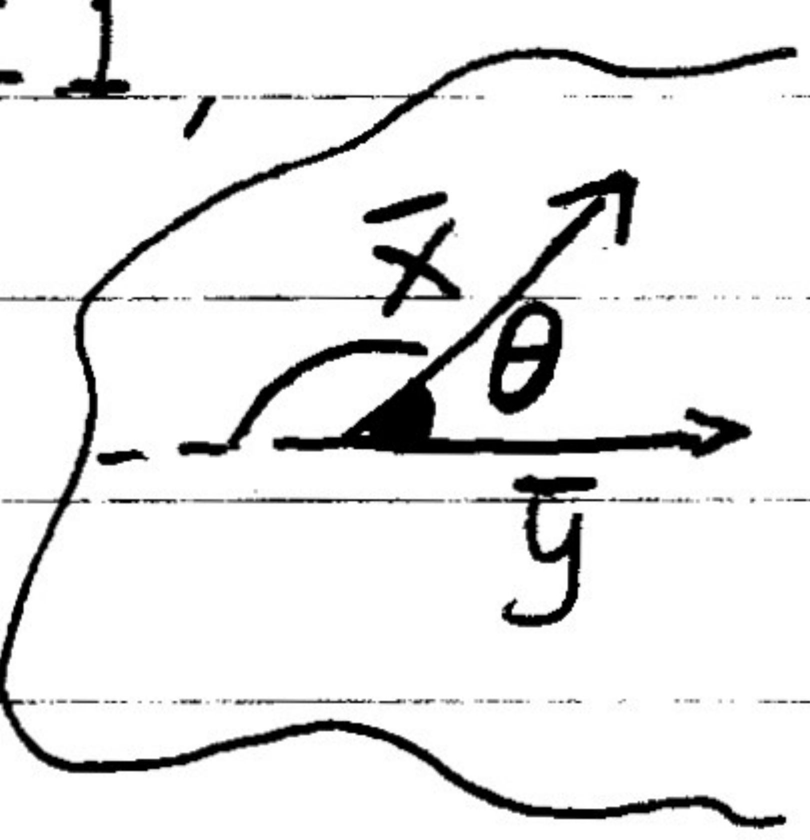
- Για $\bar{x}=\bar{0}$ ή $\bar{y}=\bar{0}$, προφανώς ισχύει η παραπάνω
- Για μη μηδενικά $\bar{x},\bar{y}$, από τον ορισμό της μεταξύ τους γωνίας θ, έχω ότι

$$\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|}$$, καθώς και

ότι $|\cos\theta| \leq 1$, $\forall\, \theta \in [0, 2\pi)$, άρα και στο $[0,\pi]$

Συνδυάζοντας τα δυο παραπάνω έχω ότι:

$\left| \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|} \right| \leq 1$, δηλαδή $\frac{|\bar{x}\cdot\bar{y}|}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|} \leq 1$,



δηλαδή $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$ ■

Παρατήρηση: Η ισότητα στην ανισότητα C.S θα ισχύει όταν και μόνο όταν $|\cos\theta| = 1$, δηλαδή όταν $\cos\theta = 1$ ή $\cos\theta = -1$, δηλαδή όταν $\theta = 0$ ή π rad, δηλαδή όταν και μόνο όταν $\bar{x}, \bar{y}$ συγγραμικά στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή όταν και μόνο όταν $\bar{x}, \bar{y}$ γραμμικώς εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^n$. *Οι τιμές $0, \pi$ είναι οι μόνες δυνατές γιατί εξ' ορισμού $\theta_{\bar{x},\bar{y}} \in [0,\pi]$ (μικρότερη μεταξύ τους γωνία)

▸ Απόδειξη Τριγωνικής Ανισότητας στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Είναι: $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{y}\|^2$

$\leq \|\bar{x}\|^2 + 2|\bar{x}\cdot\bar{y}| + \|\bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2$

$= (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2$, οπότε παίρνοντας τις θετικές τετραγωνικές ρίζες των δυο μελών, η ανισότητα έπεται

Από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ισχύουν οι δυο επιμέρους ισότητες, δηλαδή αν και μόνο αν:

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = |\bar{x}\cdot\bar{y}| \quad \underline{\text{και}} \quad |\bar{x}\cdot\bar{y}| = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$$

Από την ανισότητα C.S, αυτά ικανοποιούνται αν και μόνο αν:

$\bar{x}\cdot\bar{y} \geq 0$ <u>και</u> $\bar{x},\bar{y}$ γραμμικώς εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^n$.

Ισοδύναμα, αν και μόνο αν $\bar{y} = \lambda\bar{x}$, $\lambda \geq 0$